1.5.6 Důkazy dělitelnosti II

Předpoklady: 010505

Pedagogická poznámka: Hodinu je třeba řídit tak, aby na konci hodiny zbylo pět minut na poslední příklad (který je určen na samostatné dopracování doma). Dopočítat příklad 6 je mimo možnosti velké většiny žáků. Pokud Vám při jeho zadávání zbývá alespoň 10 minut a máte zavedený systém na dělení na skupiny, stojí zato zadat tento příklad jako skupinovou práci.

Př. 1: Dokaž, že pro každé přirozené číslo $n>1$ platí: $6 \mid n^3-n$.

Zkusíme:

- $n=2$, $n^3-n=2^3-2=8-2=6$ - je dělitelné 6,
- $n=3$, $n^3-n=3^3-3=27-3=24$ - je dělitelné 6,
- ale tyto pokusy rozhodně nejsou důkazem (ještě nekonečně mnoho čísel jsme nevyzkoušeli).

Rozložíme na součin $n^3-n=n\left(n^2-1\right)=n(n-1)\cdot(n+1)=(n-1)n(n+1)$ - tři po sobě jdoucí čísla $\Rightarrow$ alespoň jedno dělitelné dvěma, alespoň jedno je dělitelné třemi. Číslo n^3-n je dělitelné 2 a 3, tedy je dělitelné 6.

V následujících příkladech budeme opakovaně umocňovat na druhou dvojčleny typu $3k+1$.
Tento výpočet si můžeme ulehčit pomocí vzorce: $(a+b)^2=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

Příklad:
$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(3k+1)^2=(3k)^2+2\cdot 3k\cdot 1+1^2=9k^2+6k+1$$

Dodatek: Použití vzorce už jsme procvičovali v druhé hodině o kvadratických rovnicích v úvodním opakování. Více o úpravách mnohočlenů v kapitole 0107.

Př. 2: Dokaž, že pro každé přirozené číslo n platí: $3 \mid n^3+2n$.

Zkusíme $n=3$, $n^3+2n=3^3+2\cdot 3=33$ - je dělitelné 3, ale není to důkaz.
Rozložíme na součin $n^3+2n=n\left(n^2+2\right)$

Součin nestačí, všechna přirozená čísla zkoušet nemůžeme $\Rightarrow$ vyzkoušíme všechna přirozená čísla pomocí skupin podle dělitelnosti 3 (jsou jenom tři $3k, 3k+1, 3k+2$).

- $n=3k$:
  $n\left(n^2+2\right)=3k\left((3k)^2+2\right)=3k\left(9k^2+2\right)$
- $n=3k+1$:
  $n\left(n^2+2\right)=(3k+1)\left((3k+1)^2+2\right)=(3k+1)\left(9k^2+6k+1+2\right)=(3k+1)3\left(3k^2+2k+1\right)$

- $n = 3k + 2$:

  $n\left(n^2+2\right) = (3k+2)\left((3k+2)^2+2\right) = (3k+2)\left(9k^2+12k+4+2\right) = (3k+2)3\left(3k^2+4k+2\right)$

Jiná možnost není (každé přirozené číslo patří do jedné z prozkoumaných skupin $\Rightarrow$ tak jsme to dokázali!!!!

Př. 3: Kde je v předchozím důkazu dokázáno, že číslo $31^3 + 2\cdot 31$ je dělitelné třemi?

Platí $31 = 3\cdot 10 + 1$ $\Rightarrow$ číslo 31 patří do skupiny čísel, která můžeme zapsat jako $3k+1$ $\Rightarrow$ dělitelnost čísla $31^3 + 2\cdot 31$ byla dokázána v řádku:
$n = 3k+1$**:**
$n\left(n^2+2\right) = (3k+1)\left((3k+1)^2+2\right) = (3k+1)\left(9k^2+6k+1+2\right) = (3k+1)3\left(3k^2+2k+1\right)$

Př. 4: Zformuluj hlavní myšlenku předchozího důkazu.

Nemůžeme postupně dokázat dělitelnost nekonečně mnoha čísel. Využijeme toho, že všechna přirozená čísla můžeme rozdělit do tří skupin podle zbytků po dělení třemi. Pro každou skupinu dokážeme dělitelnost obecně. Tím dokážeme vlastnost pro všechna čísla.

Pedagogická poznámka: Zeptat se na hlavní myšlenku ještě jednou je potřeba. Část žáků důkaz jen tak přetrpí a jakž takž se smíří s jednotlivými kroky, aniž by pochopila jeho smysl.

Př. 5: Dokaž, že pro každé přirozené číslo $n > 3$ platí: $3 \mid n^3 - 4n$.

Zkusíme $n = 3$, $n^3 - 4n = 3^3 - 4\cdot 3 = 15$ - je dělitelné 3, ale není to důkaz.
Rozložíme na součin $n^3 - 4n = n\left(n^2-4\right)$.
Součin nestačí, všechna přirozená čísla zkoušet nemůžeme $\Rightarrow$ vyzkoušíme všechna přirozená čísla pomocí skupin podle dělitelnosti 3 (jsou jenom tři).

- $n = 3k$:

  $n\left(n^2-4\right) = 3k\left((3k)^2-4\right) = 3k\left(9k^2-4\right)$

- $n = 3k+1$**:**

  $n\left(n^2-4\right) = (3k+1)\left((3k+1)^2-4\right) = (3k+1)\left(9k^2+6k+1-4\right) = (3k+1)3\left(3k^2+2k-1\right)$

- $n = 3k+2$:

  $n\left(n^2-4\right) = (3k+2)\left((3k+2)^2-4\right) = (3k+2)\left(9k^2+12k+4-4\right) = (3k+2)3\left(3k^2+4k\right)$

Jiná možnost není $\Rightarrow$ dokázáno!!!!

Př. 6: Dokaž, že pro každé přirozené číslo *n* platí: $6 \mid n^3 + 5n$.

Zkusíme:
$n = 3$, $n^3 + 5n = 3^3 + 5\cdot 3 = 27 + 15 = 42$ - je dělitelné 6, ale není to důkaz.
Rozložíme na součin $n^3 + 5n = n\left(n^2+5\right)$.

Součin nestačí, všechna přirozená čísla zkoušet nemůžeme $\Rightarrow$ vyzkoušíme všechna přirozená čísla pomocí skupin podle dělitelnosti 6 (je jich šest).

- $n = 6k$:

  $n(n^2+5) = 6k((6k)^2+5) = 6 \cdot k((6k)^2+5)$
- $n = 6k+1$:

  $n(n^2+5) = (6k+1)\left[(6k+1)^2+5\right] = (6k+1)\left[36k^2+12k+1+5\right] =$

  $= (6k+1)(36k^2+12k+6) = (6k+1)\cdot 6 \cdot (6k^2+2k+1)$
- $n = 6k+2$:

  $n(n^2+5) = (6k+2)\left[(6k+2)^2+5\right] = (6k+2)\left[36k^2+24k+4+5\right] =$

  $= (6k+2)(36k^2+24k+9) = 2\cdot(3k+1)\cdot 3\cdot(12k^2+8k+3) = 6\cdot(3k+1)(12k^2+8k+3)$
- $n = 6k+3$:

  $n(n^2+5) = (6k+3)\left[(6k+3)^2+5\right] = (6k+3)\left[36k^2+36k+9+5\right] =$

  $= (6k+3)(36k^2+36k+14) = 3\cdot(2k+1)\cdot 2\cdot(18k^2+18k+7) =$

  $= 6\cdot(2k+1)(18k^2+18k+7)$
- $n = 6k+4$:

  $n(n^2+5) = (6k+4)\left[(6k+4)^2+5\right] = (6k+4)\left[36k^2+48k+16+5\right] =$

  $= (6k+4)(36k^2+48k+21) = 2\cdot(2k+2)\cdot 3\cdot(12k^2+16k+7) =$

  $= 6\cdot(2k+2)(12k^2+16k+7)$
- $n = 6k+5$:

  $n(n^2+5) = (6k+5)\left[(6k+5)^2+5\right] = (6k+5)\left[36k^2+60k+25+5\right] =$

  $= (6k+5)(36k^2+60k+30) = (6k+5)\cdot 6\cdot(6k^2+10k+5)$

Jiná možnost není $\Rightarrow$ dokázáno!!!!

Dodatek: Uvedené řešení sice odpovídá způsobu, jakým se řešily předchozí příklady, ale není nejrychlejší. Pokud si uvědomíme, že číslo je dělitelné šesti, pokud je dělitelné dvěma i třemi najednou, můžeme si důkaz trochu zkrátit tím, že nejdříve dokážeme dělitelnost dvěma (skupiny $2k$ a $2k+1$) a pak dělitelnosti třemi (skupiny $3k$, $3k+1$ a $3k+2$).

Př. 7: Na základní škole ses učil pravidla, podle kterých je možné ze zápisu čísla poznat, zda je dělitelné určitým číslem (znaky dělitelnosti). Zopakuj si pravidla dělitelnosti pro čísla 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 a rozděl je do čtyř skupin (v každé skupině budou pravidla, která k sobě logicky patří).

Pravidla:
Přirozené číslo je dělitelné dvěma, právě když končí na číslice 0, 2, 4, 6, 8.
Přirozené číslo je dělitelné třemi, právě když je jeho ciferný součet dělitelný třemi.
Přirozené číslo je dělitelné čtyřmi, právě když je jeho poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi.
Přirozené číslo je dělitelné pěti, právě když končí na číslice 0 nebo 5.
Přirozené číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a třemi najednou.

Přirozené číslo je dělitelné devíti, právě když je jeho ciferný součet dělitelný devíti.
Přirozené číslo je dělitelné deseti, právě když končí na číslici 0.

Pedagogická poznámka: Rozdělení do skupin na počátku příští hodiny.

Shrnutí: Pokud nedokážeme dělitelnost zřejmým výskytem čísel v součinu nebo úpravou, můžeme dokazovat dosazováním pomocí zbytkových tříd.